

TIPE 2024 : JEUX ET SPORT

Quels matériaux sont à privilégier lors de la conception d'une raquette pour un joueur offensif ?

Jeremy ROUSSEAU
34990





Quels matériaux sont à privilégier lors de la conception d'une raquette pour un joueur offensif ?



Modéliser le contact raquette / balle



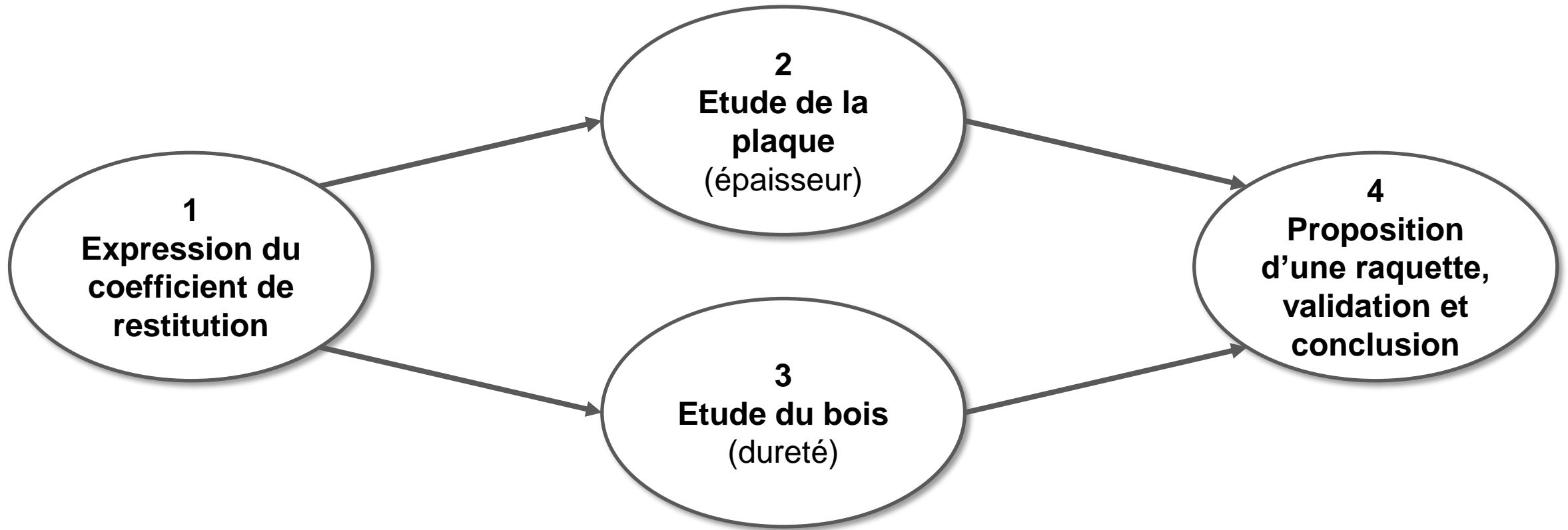
Déterminer les matériaux maximisant la vitesse



Déterminer une association plaque-bois maximisant la vitesse



Plan



Déterminer la meilleure raquette offensive



1°) 1. Constitution d'une raquette

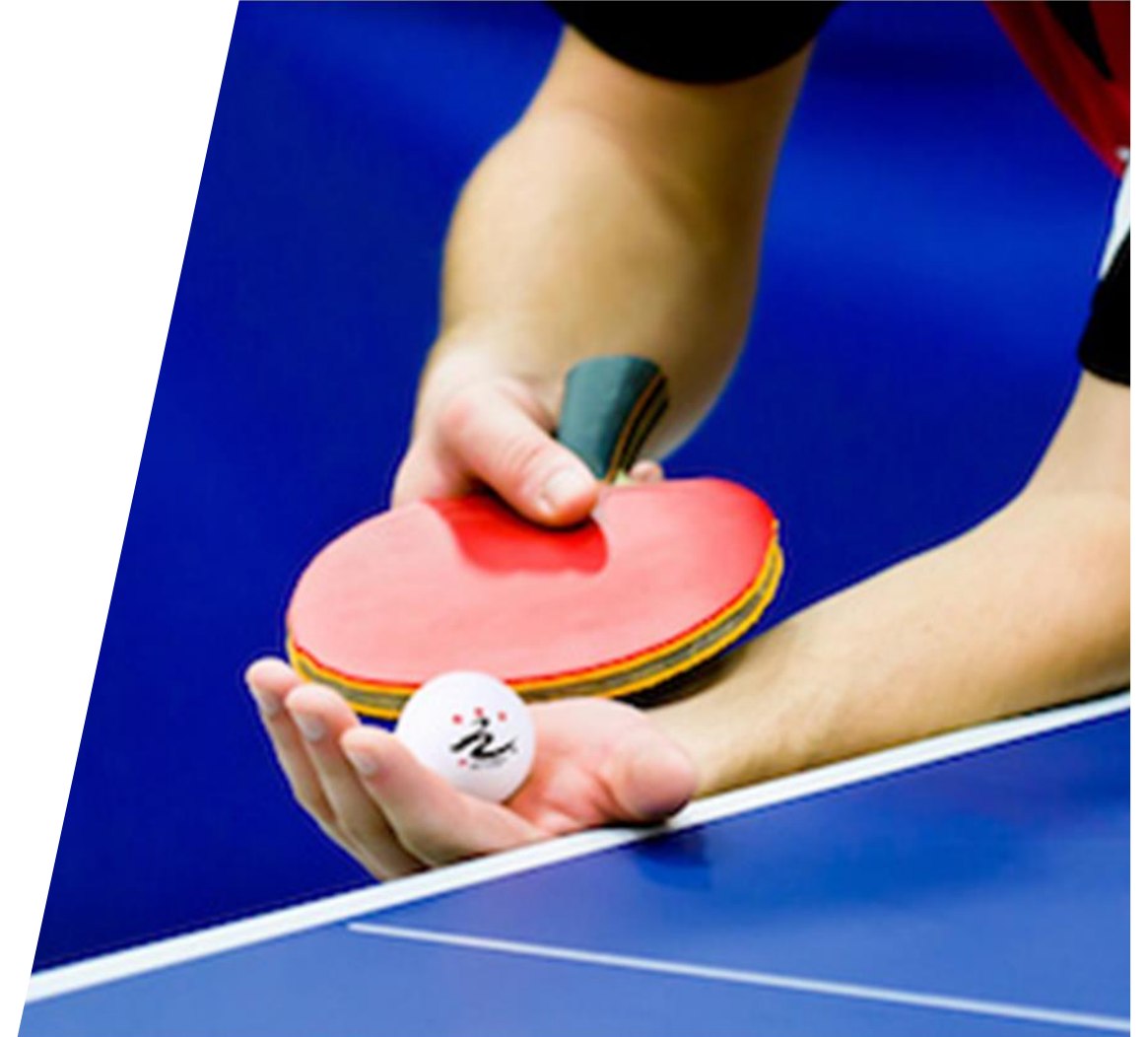
• PICOT :



• SOFT :



• BACKSIDE :

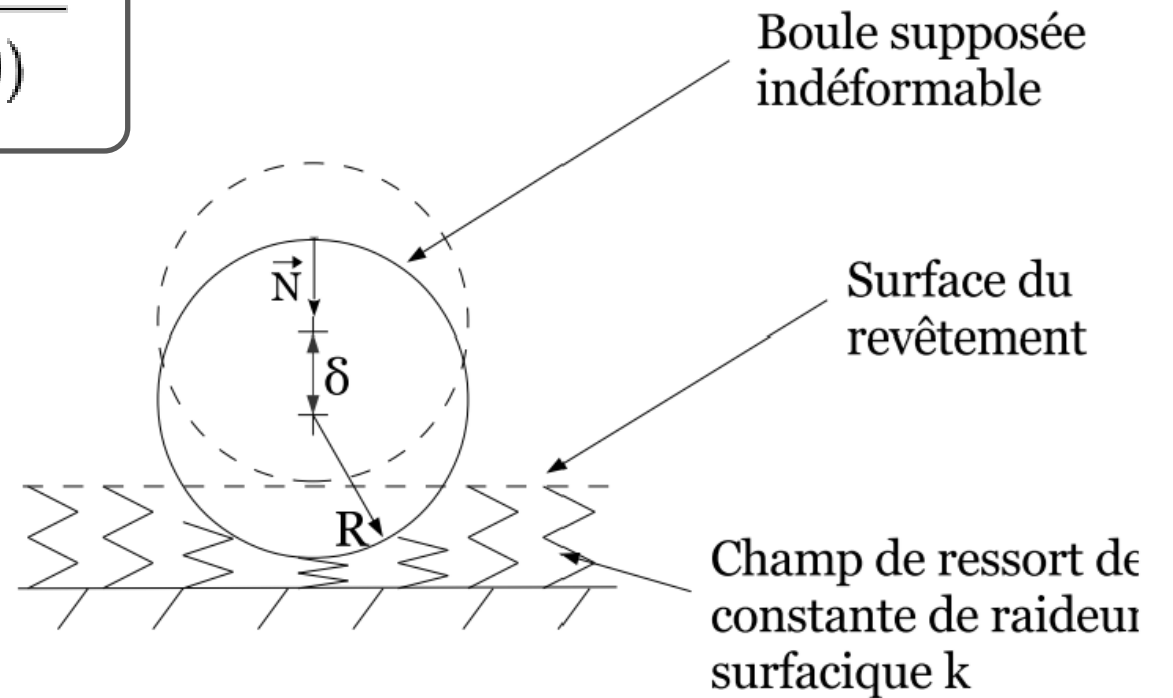




1°) 2. Modélisation d'une raquette

Etude de la déformation de la raquette

$$\epsilon = \frac{\text{Vitesse relative après collision}}{\text{Vitesse relative avant collision}} = \frac{\dot{\delta}(\Delta T)}{\dot{\delta}(0)}$$



On supposera la balle **indéformable**.



1°) 2. Modélisation d'une raquette

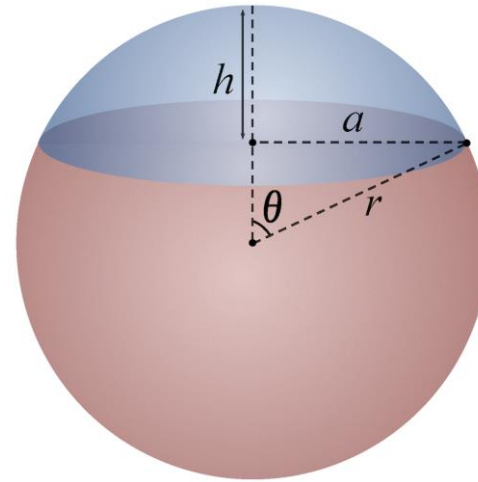
Force d'enfoncement

Relation non linéaire

$$\vec{dN} = -k\delta dS \vec{u}_x$$

En intégrant sur toute la surface de la calotte sphérique :

$$\begin{aligned}\vec{N} &= -2\pi k R \delta^2 \vec{u}_x \\ \vec{N} &= -2\pi k R \delta^\alpha \vec{u}_x\end{aligned}$$



Force résistive

Si la force surfacique élémentaire d'amortissement est

$$d\sigma_t = \eta \dot{\delta}$$

En intégrant sur toute la surface de contact :

$$\vec{F} = -2\pi R \eta \delta \dot{\delta} \vec{u}_x$$



1°) 3. Détermination du coefficient de restitution

D'après le PFD appliqué à la balle :

$$\ddot{\delta} + \frac{\eta 2\pi R}{m} \dot{\delta} \delta + \frac{2\pi k R}{m} \delta^\alpha = 0$$

Après adimensionnement des équations et une résolution numérique on obtient :

$$\epsilon = 1 - cv_0^{\frac{3-\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\epsilon = 1 - cv_0^{\frac{1}{3}} \text{ où } c = \left(\frac{3}{2} \frac{m}{k} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\eta}{2m}$$



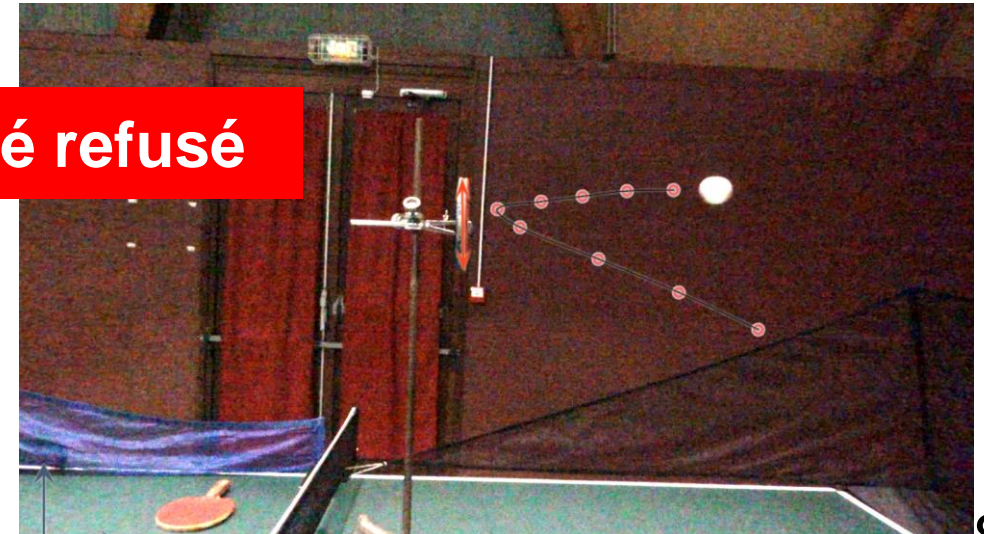
1^o) 4. Validations expérimentales



Lancé accepté

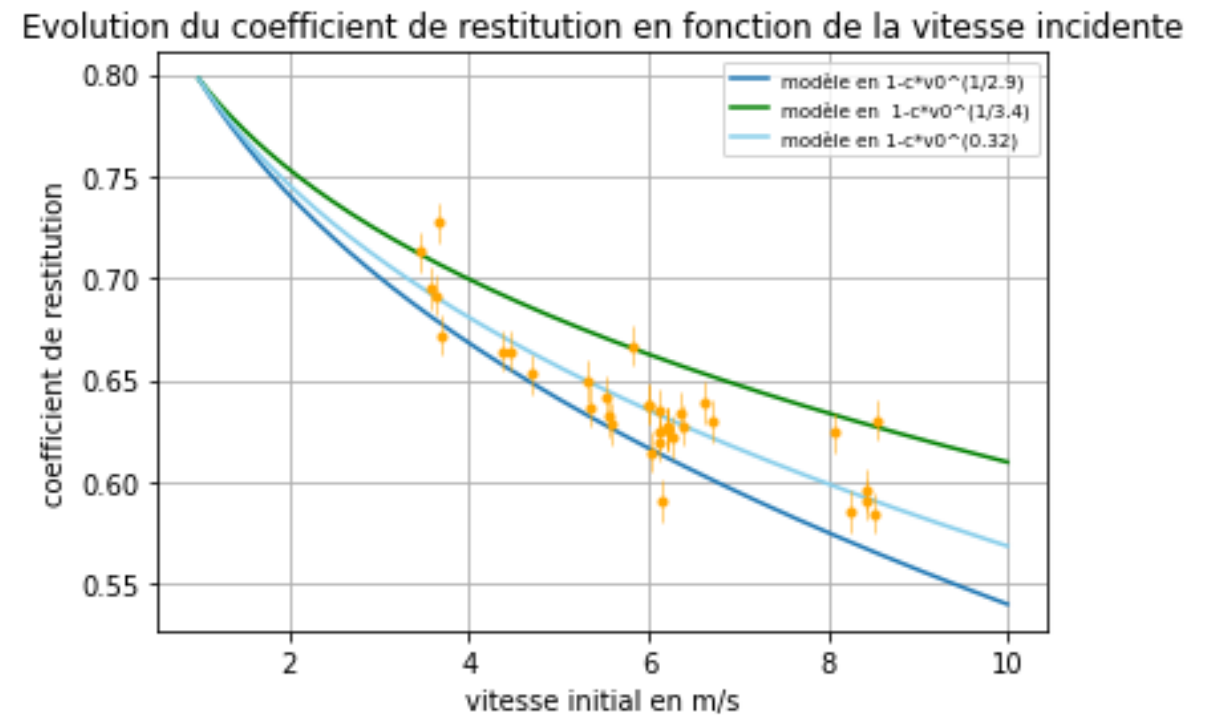
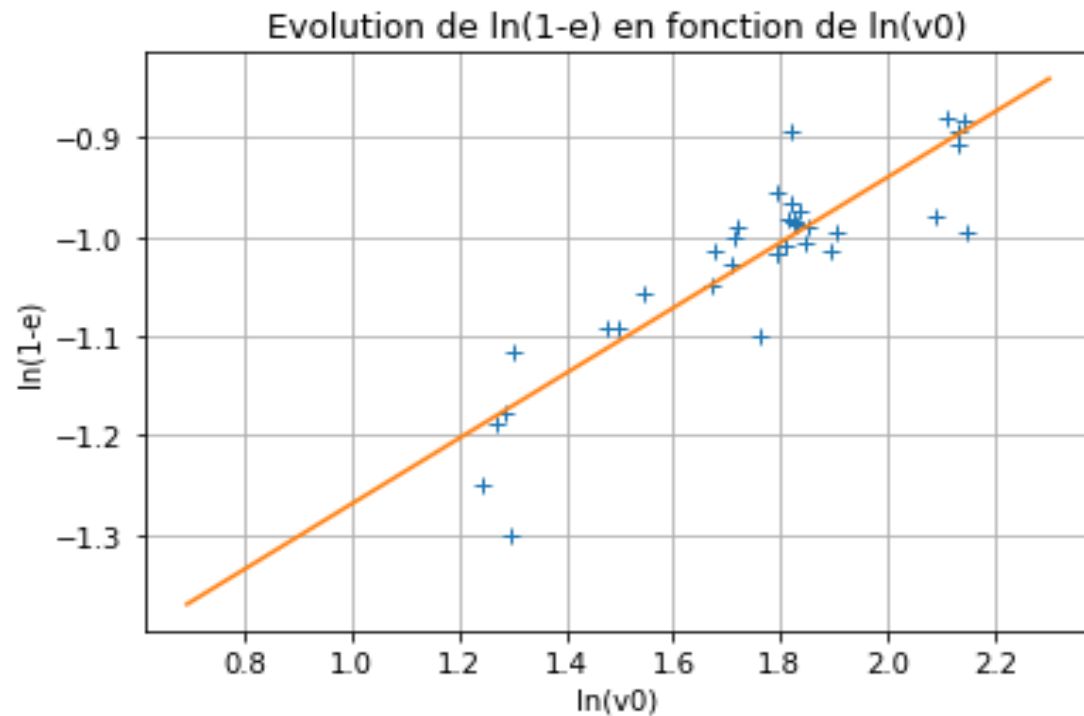


Lancé refusé





1°) 4. Validations expérimentales





1^o) 5. Conclusions

Résultats

- Coefficients de restitution anormalement bas :
→ cohérent en prenant en compte la rotation de la balle

- On trouve bien la relation :
$$\epsilon = 1 - cv_0^{\frac{1}{3}}$$

- L'exposant peut bien être approché par 1/3

Hypothèse

- Balle indéformable → Possible si l'épaisseur de mousse est assez importante

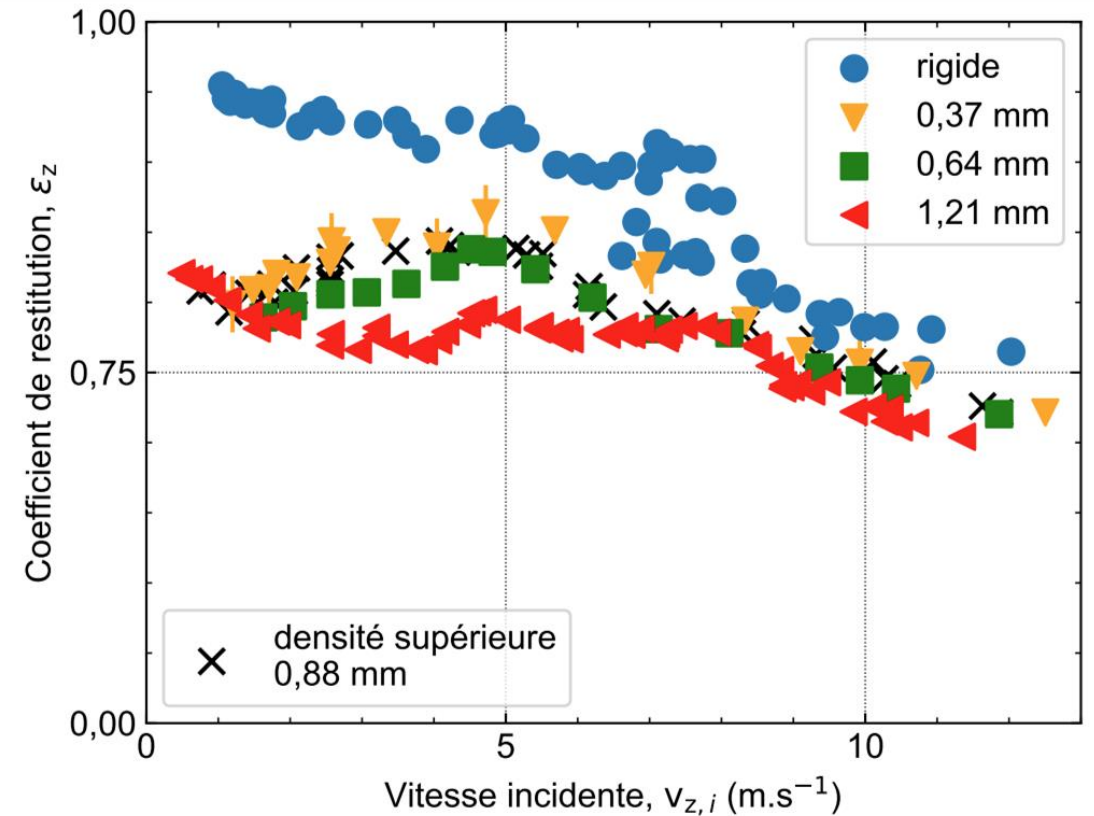


FIGURE IV.8 – Coefficient de restitution en vitesse normale ϵ_z de la balle en fonction de la vitesse incidente $v_{z,i}$, sur différentes épaisseurs de mousses de raquettes de tennis de table. Plus l'épaisseur de la mousse est grande, plus la balle va être amortie lors du choc. Une mousse plus dense va également présenter une restitution en vitesse légèrement supérieure.



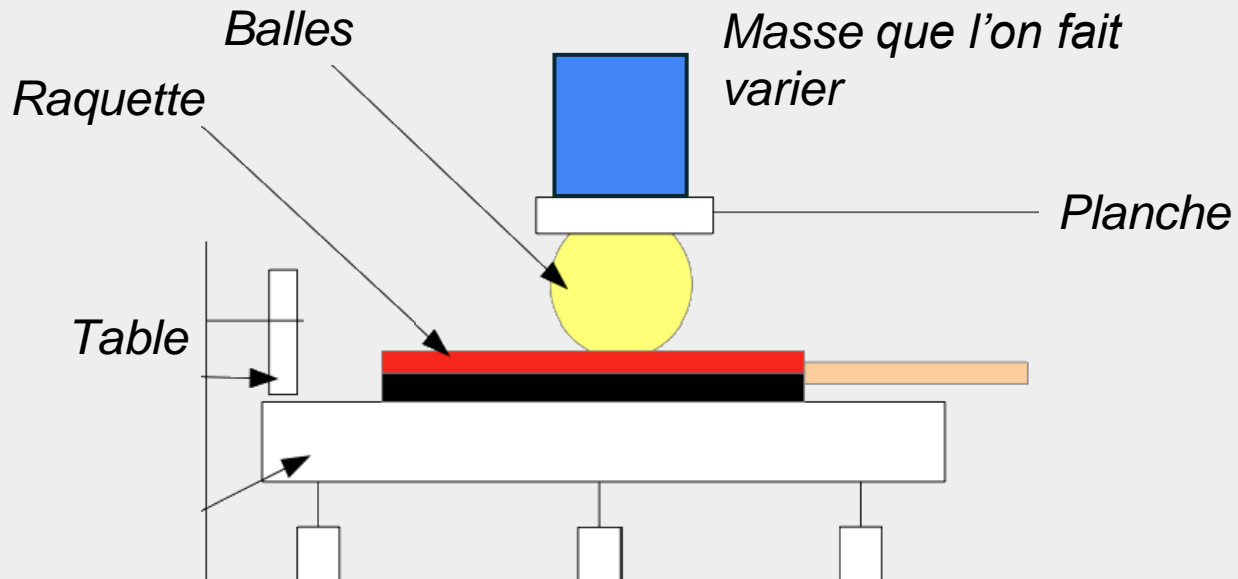
2°) 1. Influence de la plaque

Hypothèse : L'épaisseur de la mousse influe sur l'exposant et sur k

$$\vec{N} = -2\pi k R \delta^\alpha \vec{u}_x$$

Protocole expérimental : Pour une raquette donnée:

- Mesurer la déformation de la raquette pour une masse donnée.
- Faire varier la masse



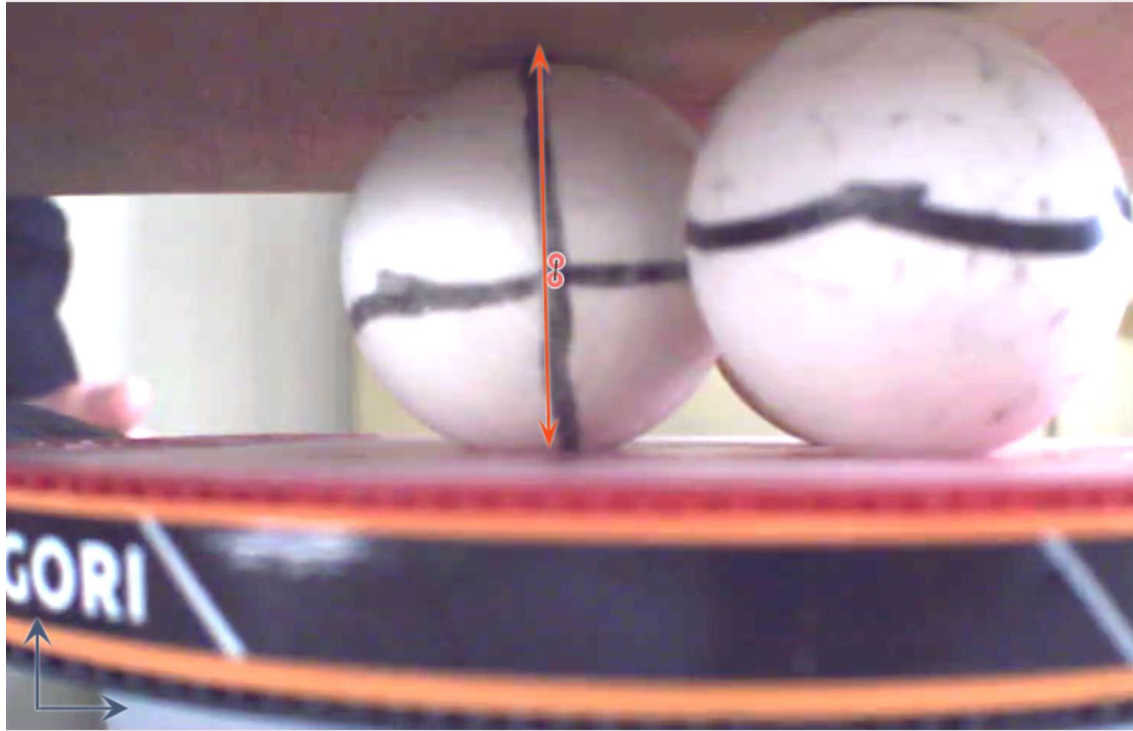
Raquettes testées :

- TTR 900, décathlon
- TT500, décathlon
- TTR130, décathlon
- PPR100, décathlon

Elles ont la même mousse et même revêtement
(source: <https://www.decathlon.fr/>)



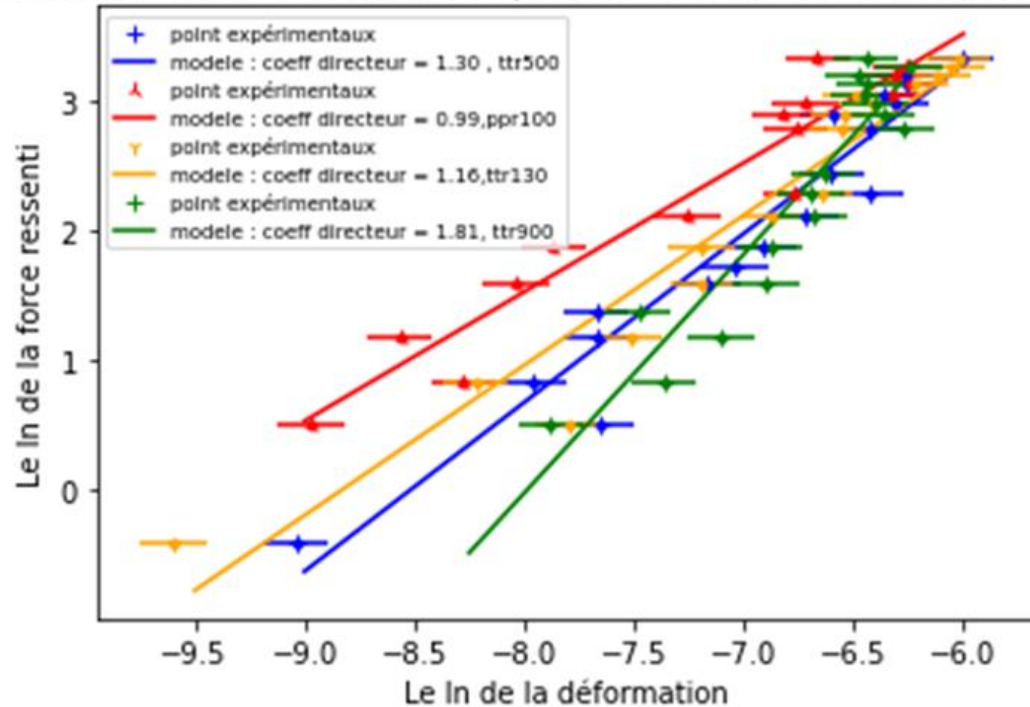
2°) 2. Expériences





2°) 3. Exploitation des résultats

la déformation de différentes raquettes en fonction de la force imposée



$$\vec{N} = -2\pi k R \delta^\alpha \vec{u}_x$$

$$\ln(N) = \alpha \ln(\delta) + \ln(2\pi R k)$$

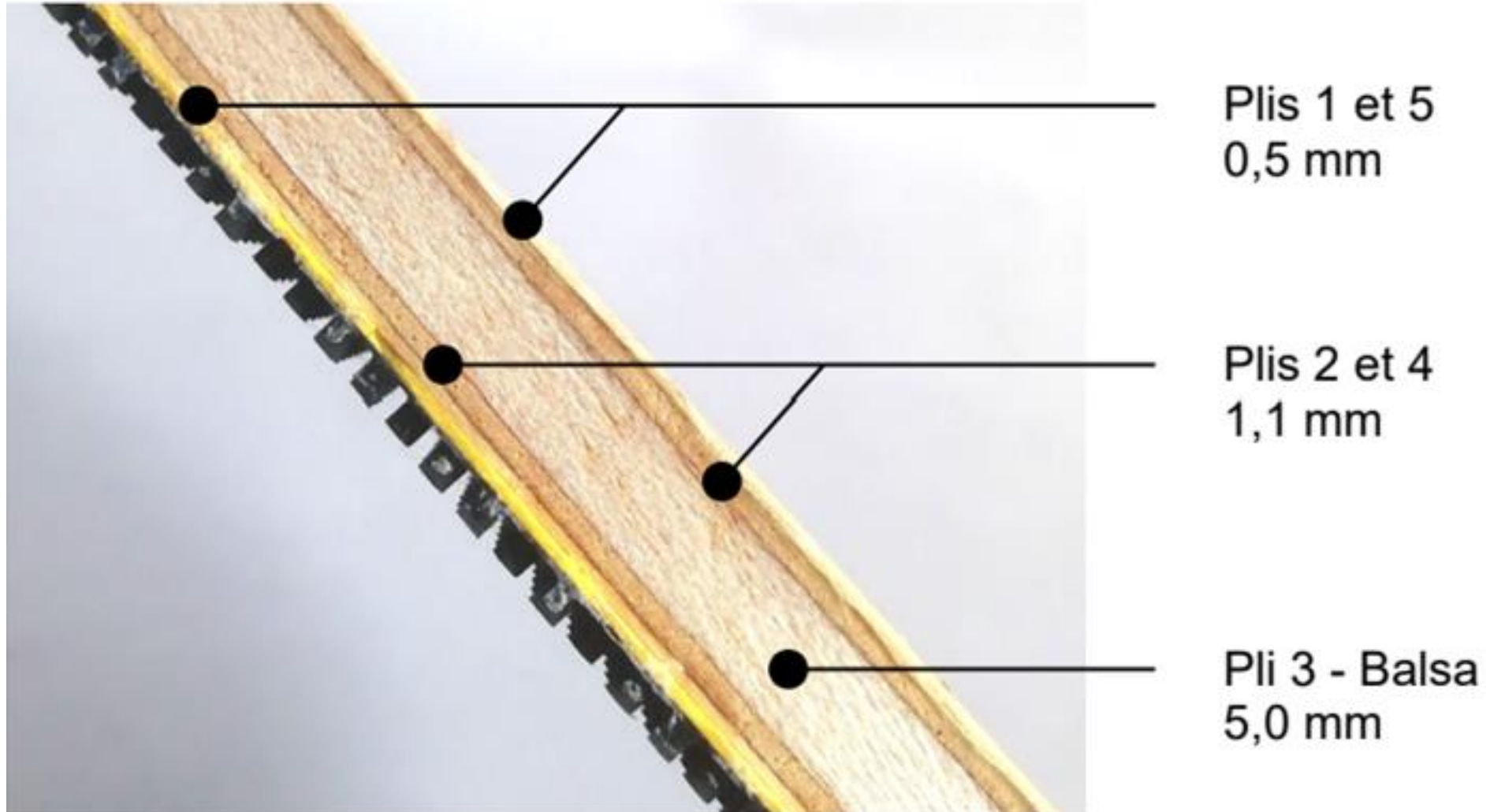
	TTR900	TTR500	TTR130	PPR100
Épaisseur de la plaque (mm)	4.5	3.9	3.1	2.0
Exposant α	1.81	1.30	1.16	0.99
Raideur k (N/m ²)	6.07 x 10 ⁶	1.12 x 10 ⁵	6.48 x 10 ⁴	3.2 x 10 ⁴

Conclusion sur l'épaisseur de la mousse :

$$\epsilon = 1 - cv_0^{\frac{3-\alpha}{1-\alpha}} \quad \text{où } c = \left(\frac{3}{2} \frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\eta}{2m}$$



3°) 1. Influence du bois – les plis





3°) 2. Lien entre la vitesse d'une raquette et la fréquence du son d'impact

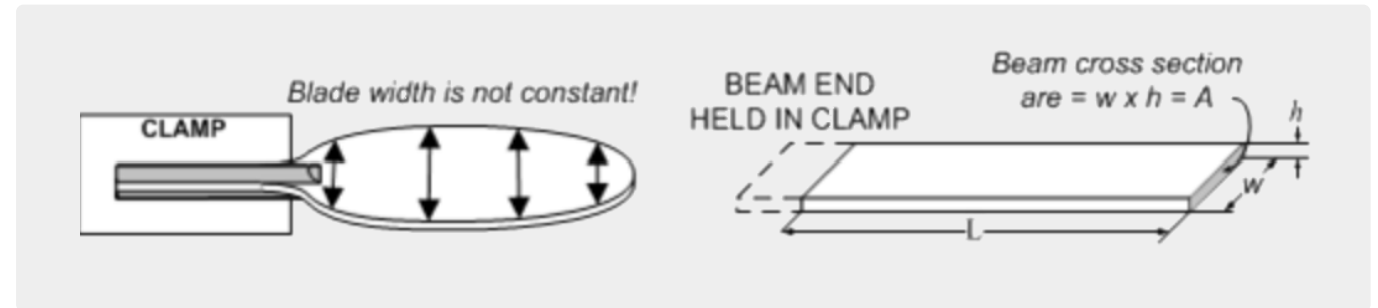
Protocole

- coller la raquette sur le bord d'une table
- lâcher une balle d'une hauteur de 1m
- mesurer la fréquence du son obtenu

Équation de la poutre dynamique

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q(x)$$

On modélise la raquette par une **planche de bois**



On obtient :

$$\nu_1 = \frac{w_1}{2\pi} = \frac{\beta_1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sum_k^N E_k I_k}{\rho A L^2}} \text{ avec } I_k = \frac{b_k h_k^3}{12} + b_k h_k d_k^2$$

ou d_k est la distance entre le k - ième plis et le pli centrale,
 b_k la largeur , et h_k la hauteur



3°) 3. Discussion sur la formule

$$\nu_1 = \frac{w_1}{2\pi} = \frac{\beta_1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sum_k^N E_k I_k}{\rho A L^2}} \text{ avec } I_k = \frac{b_k h_k^3}{12} + b_k h_k d_k^2$$

*ou d_k est la distance entre le k – ième plis et le pli centrale,
 b_k la largeur , et h_k la hauteur*



4°) 1. Meilleure raquette offensive

Plaquette Bois	Donic Bluefire M2	Donic Acuda S2	Cornilleau Drive Intens	Yasaka Mark V HPS
Cornilleau Hinotec Off	X	X	X	X
Tibhar Damien Eloi		X		X
Stiga CR Legend		X	X	
Joola J. Roskopf	X	X		

Mesure les fréquences (en Hz) des bois utilisés
à l'aide de *phyphox*

Cornillau Hinotec off	Tibhar Damien Eloi	Stiga CR legend	Joola J. Roskopf
1363	1284	1324	1335

Epaisseur des mousses (en mm)

Donic Bluefire M2	Donic Acuda S2	Cornilleau Drive Intens	Yasaka Mark V HPS
2.0	1.8	2.0	1.8



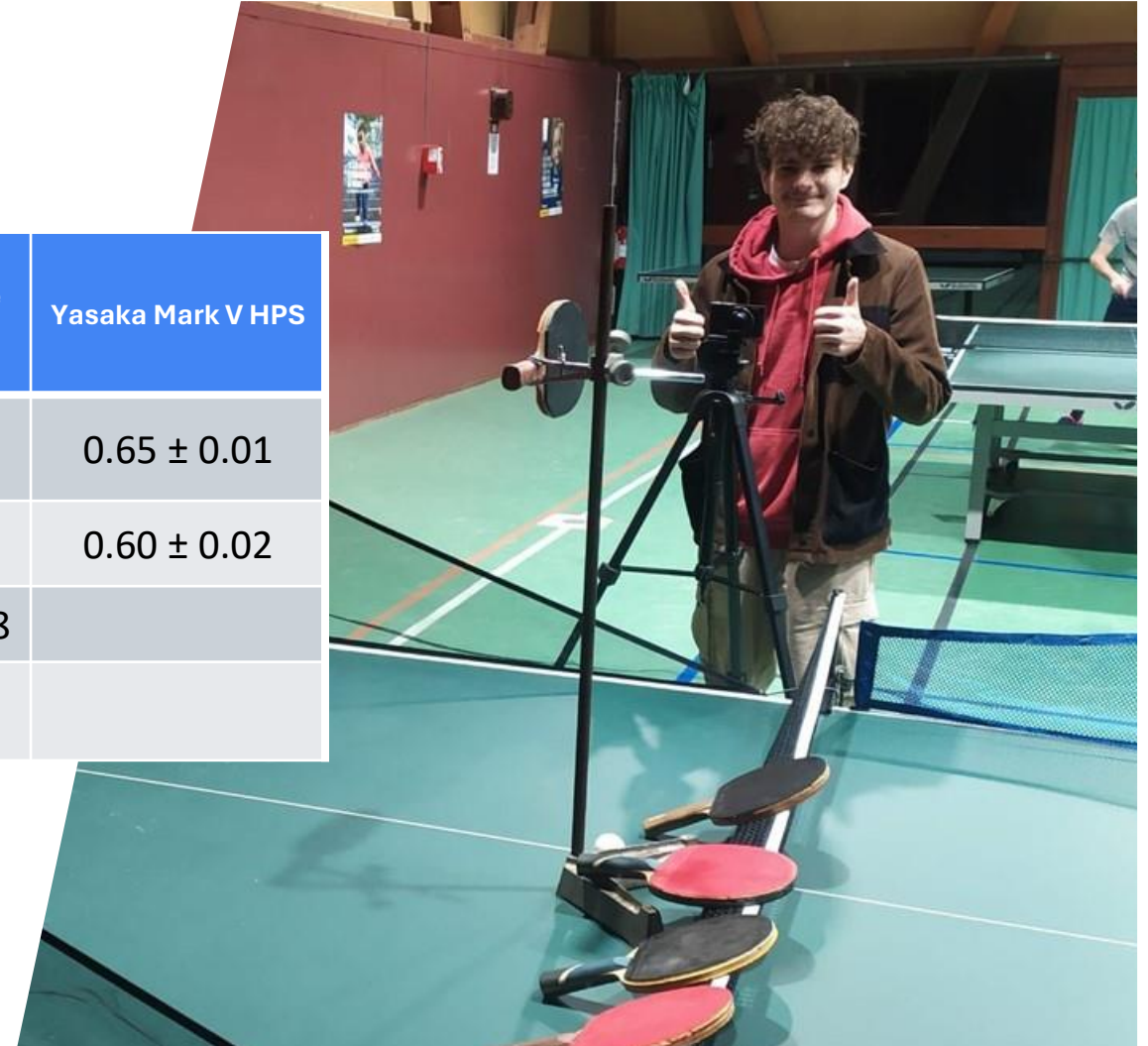
Proposition : {Cornilleau Hinotec Off + Donic Bluefire M2} ou {Cornilleau Hinotec Off + Cornillau Drive Intens}



4°) 2. Validations expérimentales

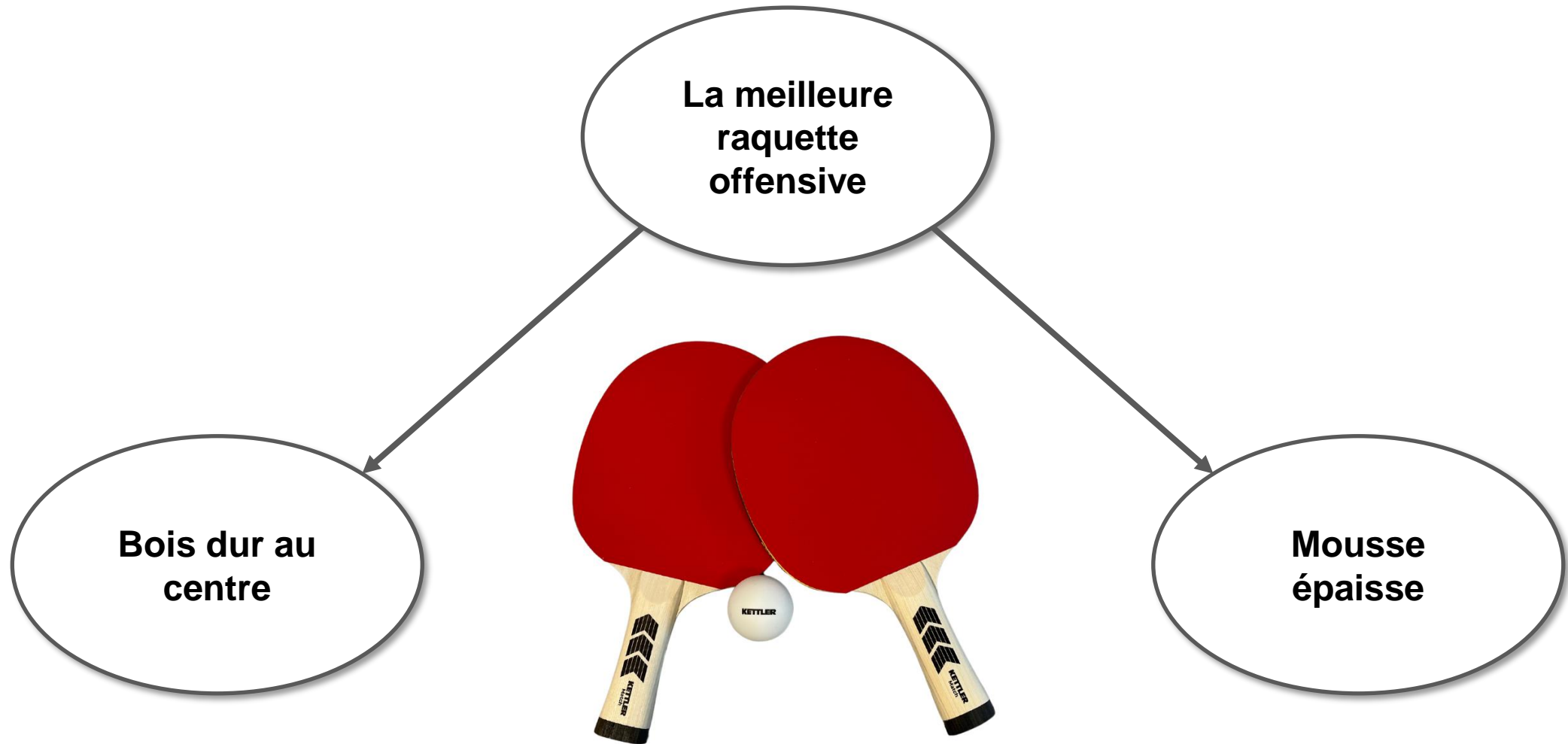
Plaques Bois	Donic Bluefire M2	Donic Acuda S2	Cornilleau Drive Intens	Yasaka Mark V HPS
Cornilleau Hinotec Off	0.72 ± 0.01	0.63 ± 0.03	0.71 ± 0.03	0.65 ± 0.01
Tibhar Damien Eloi		0.64 ± 0.03		0.60 ± 0.02
Stiga CR Legend		0.68 ± 0.03	0.716 ± 0.008	
Joola J. Roskopf	0.64 ± 0.02	0.61 ± 0.02		

Coefficients de restitution mesurés à $v=7.43$ m/s





Conclusions générales



Annexe 1 : Détermination du coefficient de restitution:

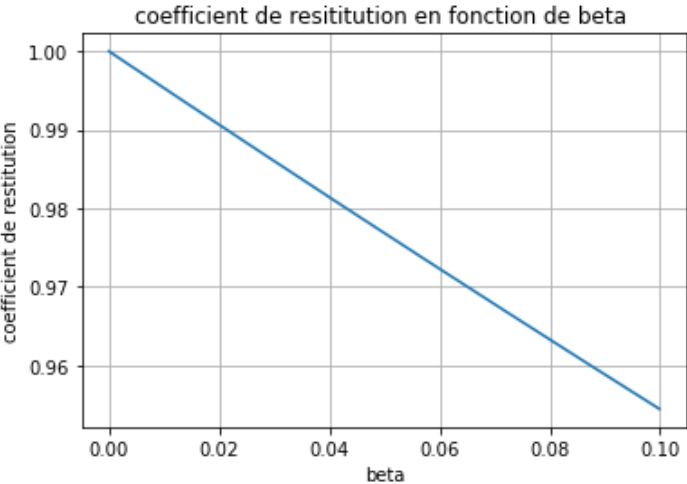
L'idée pour obtenir une expression du coefficient de restitution est d'adimensionner les équations :

Longueur réelle	Longueur caractéristique
δ	$l = \left(\frac{(1 + \alpha)mv_0^2}{2k}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}$
t	$\tau = \frac{l\pi}{v_0}$

On obtient alors une nouvelle équation adimensionnée :

$$\ddot{u} + 2\beta_2 u \dot{u} + \frac{3\pi^2}{2} u^2 = 0 \quad \text{où} \quad \beta_2 = \frac{l^2 \eta}{2mv_0}$$

On trace alors une solution approché grâce à odeint sur python pour beta dans [0,0.1]:



Le coefficient de restitution adimensionné est alors linéairement dépendant de beta , en grandeur réelle on obtient :

$$\epsilon = 1 - cv_0^{\frac{1}{3}} \text{ où } c = \left(\frac{3}{2} \frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\eta}{2m}$$

Ainsi pour augmenter ϵ il faut augmenter k et m et diminuer eta

Annexe 2 : Lien entre la vitesse d'une raquette et le son qu'on entend lors du contact entre cette dernière et une balle

On modélise la raquette par une planche de bois :



Les simplifications donnent E, I et ρ constant

On utilise ensuite l'Équation de la poutre dynamique ou équation d'Euler –Bernoulli

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q(x)$$

Où E est le module d'Young de la planche, I son moment d'inertie, μ sa masse linéique, w la déformation, et q la force extérieure par unité de longueur.

On recherche les fréquences propres on a donc $q(x) = 0$

Après simplifications :

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Cette équation peut être explicitée en somme des vibrations harmoniques de la forme :

$$w_n(x, t) = \text{Re}[\hat{w}_n(x) e^{-i\omega_n t}]$$

On est alors ramené à résoudre : $EI \frac{d^4 \hat{w}_n}{dx^4} - \mu \omega_n^2 \hat{w}_n = 0$

Les solutions sont du type :

$$\hat{w}_n = k_{1,n} \cosh(\beta_n x) + k_{2,n} \sinh(\beta_n x) + k_{3,n} \cos(\beta_n x) + k_{4,n} \sin(\beta_n x)$$

$$\text{avec } \beta_n := \left(\frac{\rho A \omega_n^2}{EI} \right)^{1/4}$$

Il reste à exprimer les constantes $k_{1,n}$; $k_{2,n}$ $k_{3,n}$ et $k_{4,n}$

Annexe 2 :Lien entre la vitesse d'une raquette et le son qu'on entend lors du contact entre cette dernière et une balle

Exprimons les constantes $k_{1,n}$; $k_{2,n}$ $k_{3,n}$ et $k_{4,n}$:



Les conditions aux limites donnent :

$$\hat{w}_n = 0, \quad \frac{d\hat{w}_n}{dx} = 0 \quad \text{quand } x = 0$$

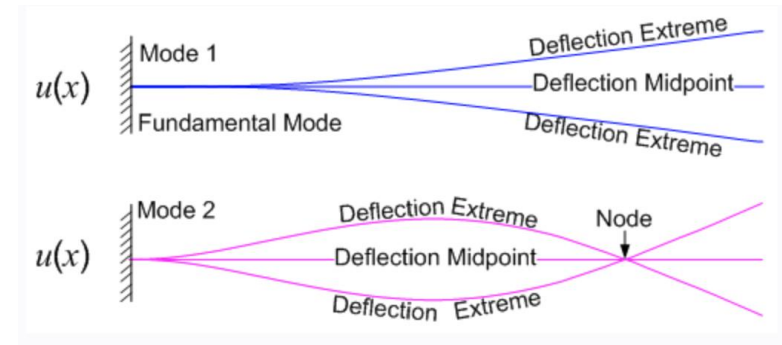
$$\frac{d^2\hat{w}_n}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3\hat{w}_n}{dx^3} = 0 \quad \text{quand } x = L.$$

Si nous appliquons ces conditions, ces solutions non triviales n'existent que si : $\cosh(\beta_n L) \cos(\beta_n L) + 1 = 0$

On a alors :

$$\hat{w}_n = A_n [(\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x) + \sigma_n (\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x)]$$

$$\text{avec } \sigma_n = \frac{\cos \beta_n L + \cosh \beta_n L}{\sin \beta_n L + \sinh \beta_n L}$$



Comme : $EI = \sum_k^N E_k I_k$

où :

EI est la rigidité effective de la poutre.

E_k est le module de Young de la k -ième couche.

I_k est le moment d'inertie de la k -ième couche par rapport centre de masse.

Il résulte enfin :

$$\nu_1 = \frac{w_1}{2\pi} = \frac{\beta_1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sum_k^N E_k I_k}{\rho A L^2}} \text{ avec } I_k = \frac{b_k h_k^3}{12} + b_k h_k d_k^2$$

ou d_k est la distance entre le k - ième plis et le pli centrale,

b_k la largeur , et h_k la hauteur

Annexe 3 : Preuve de l'équation de la poutre dynamique

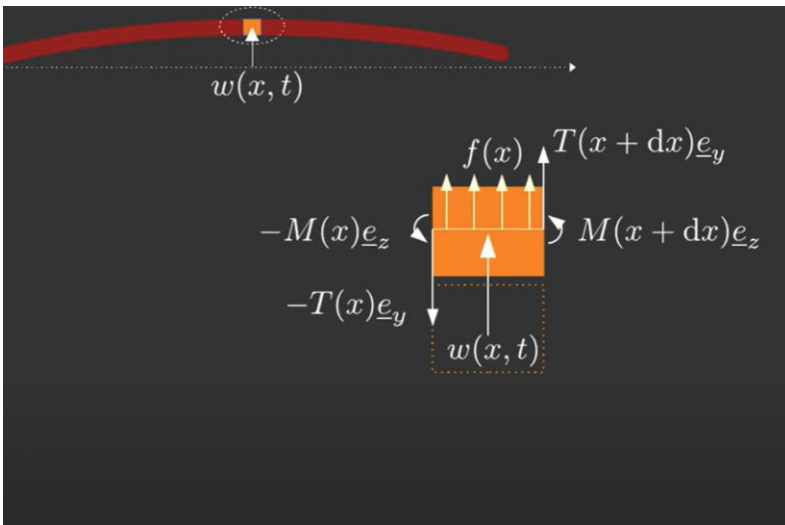
On note w la déformation de la poutre, f la force linéique appliquée sur la poutre, on va montrer :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) = -\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f(x)$$

où E est le module d'Young de la poutre, I son moment d'inertie et μ sa masse linéique.

Hypothèses :

- 1) La poutre subit de petites déformations
- 2) $EI = \text{constant}$,
- 3) La poutre est isotopique
- 4) La poutre est linéaire ie elle obéit à la loi de Hook,
- 5) elle a une structure élancée, ie sa longueur est grande devant sa largeur



Equation d'équilibre :

Considérons une portion infinitésimale de la poutre, de longueur dx . Celle-ci se déplace d'une quantité $w(x, t)$ au cours de la transformation. On fait le bilan des efforts et des moments s'exerçant sur cette portion :

La section gauche à l'abscisse x exerce un moment $-M(x)$ et une force $-T(x)$, la section droite va exercer à l'abscisse $x + dx$ un moment $M(x + dx)$ et une force $T(x + dx)$. On considère également une force linéique f .

On applique alors le Principe fondamental de la dynamique :

On a : $T(x + dx) - T(x) + f(x)dx = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, en notant μ la masse linéique on a $m = \mu dx$, on prend également $T(x + dx) - T(x) = \frac{dT}{dx} dx$, il résulte :

$$T'(x) + f(x) = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

On fait de même pour les moments en traduisant l'équilibre :

On a $M(x + dx) - M(x) + Tdx + f(x)dx dx = 0$ puis en négligeant les termes en dx^2 on a :

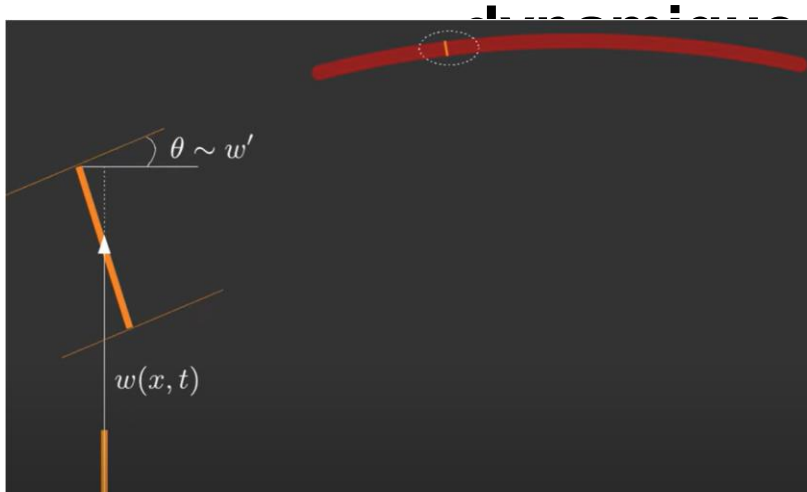
$$M'(x) + T = 0$$

Le terme Tdx est le moment de la contrainte de cisaillement T .

Finalement en combinant ces 2 équations on a :

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + M''(x) = f(x)$$

Annexe 3 : Preuve de l'équation de la poutre



Le champs de déplacement $\underline{\xi}$ vaut alors : $\underline{\xi} = w\underline{e}_y - w'\underline{y}\underline{e}_x$ (Pour chaque point dans le milieu, le champ de déplacement donne la position de ce point à un moment donné par rapport à sa position initiale).

D'après le loi de Hook, on a $\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx}$, où σ_{xx} est la contrainte, ϵ_{xx} la déformation , et E le module de Young. On a également $\epsilon_{xx} = \xi'_x$ (on va démontrer cette dernière égalité)

Le moment résultant M vaut :

$$M = \int_S y \sigma_{xx} dS$$

(nous allons également le montrer)

En calculant M on obtient :

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (**)$$

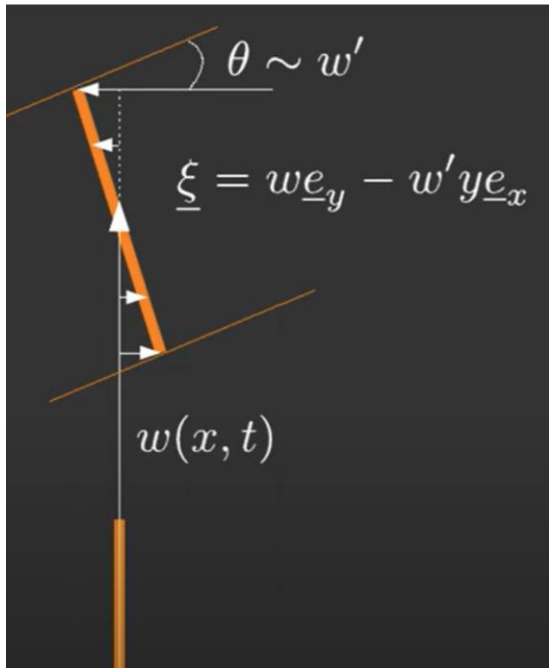
où I est le moment d'inertie : $I = \int_S y^2 dS$

Conclusion

En combinant (*) et (**) on obtient :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) = -\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + F(x)$$

Ce qu'il fallait démontrer



Annexe 3 : Preuve de l'équation de la poutre dynamique

Démontrons que $\epsilon_{xx} = \xi'_x$

La déformation linéaire, souvent notée par ϵ , est définie comme le changement relatif de longueur d'un objet lorsqu'il est soumis à une force. Si nous considérons un objet de longueur initiale L qui s'étire pour devenir une longueur $L + \Delta L$ sous l'effet d'une force, alors la déformation est donnée par :

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

Maintenant, si nous considérons un champ de déplacement continu $\xi(x)$ le long de l'objet, alors le déplacement à un point x est $\xi(x)$, et le déplacement à un point voisin $x + \Delta x$ est $\xi(x + \Delta x)$. Le changement de longueur entre ces deux points est donc $\Delta L = \xi(x + \Delta x) - \xi(x)$.

Si nous insérons cela dans notre formule de déformation, nous obtenons :

$$\epsilon = \frac{\xi(x + \Delta x) - \xi(x)}{\Delta x}$$

Ceci est la définition d'une dérivée. Donc, dans la limite où Δx tend vers zéro, nous avons :

$$\epsilon = \frac{d\xi}{dx}$$

Démontrons que $M = \int_S y \sigma_{xx} dS$

Supposons que nous avons une poutre en flexion sous une distribution de contrainte normale σ_{xx} . Nous voulons calculer le moment résultant dû à cette distribution de contrainte.

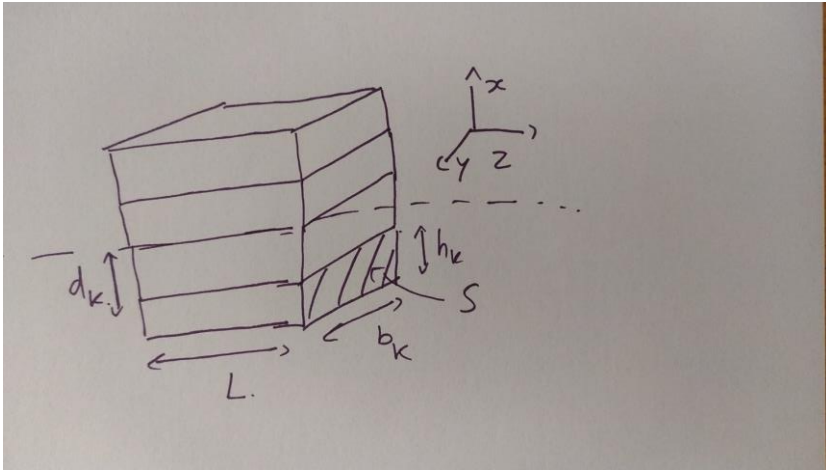
Nous commençons par considérer un petit élément de surface dS à une distance y_0 de l'axe neutre (l'axe autour duquel la poutre se courbe).

La force sur cet élément de surface est $dF = \sigma_{xx} dS$. (par définition de la contrainte)

Le moment infinitésimal dû à cette force est $dM = y_0 dF = y_0 \sigma_{xx} dS$.

Pour obtenir le moment total, nous intégrons sur toute la surface de la poutre : $M = \int_S y_0 \sigma_{xx} dS$.

Annexe 4 : Calcul des moments d'inerties



Pour calculer le moment de la k-ième stratification on considère non pas y^2 mais $(y + d_k)^2$ dans l'intégrande. On a :

$$I_k = \iint (d_k + y)^2 dx dy$$

$$I_k = \iint y^2 dx dy + 2d_k \iint y dx dy + d_k^2 \iint dx dy$$

$$I_k = I_x + d_k^2 S \text{ ou } S \text{ est la section de la poutre}$$

or $S = h_k b_k$ (et $2d_k \iint y dx dy = 0$ car on intègre une fonction impaire entre des bornes centré à l'origine)

D'où finalement :

$$I_k = \frac{b_k h_k^3}{12} + h_k b_k d_k^2$$

Par définition du moment d'inertie on a : $I_x = \int_S y^2 dS$ où dS est un élément de surface de la section de la poutre. On a :

$$I_x = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy dx$$

$$I_x = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-h/2}^{h/2} dx$$

$$I_x = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{3} \frac{4}{4} h^3 dx$$

$$I_x = \frac{1}{3} \frac{h^3}{4} \Big|_{-b/2}^{b/2}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$